

Вариант А (Условия задач и их решения)

В гильбертовом пространстве $L^2(-1, 1)$ поставлена задача квадратичной минимизации на шаре:

$$J(u) = \int_{-1}^1 8x(x+1)u^2(x)dx \rightarrow \inf,$$

$$u \in \left\{ u \in U_0 = L^2(-1, 1) \mid \int_{-1}^1 u^2(x)dx \leq 2 \right\}.$$

1. Поставьте двойственную к ней задачу максимизации:

$$\psi(\lambda) \rightarrow \sup, \quad \lambda \geq 0. \quad (*)$$

Укажите **явно** зависимость функции $\psi(\lambda)$ от λ , вычислив $\forall \lambda \geq 0$

$$\psi(\lambda) = \inf_{u \in U_0} L(u, \lambda),$$

где $L(u, \lambda)$ — классическая функция Лагранжа:

$$L(u, \lambda) = J(u) + \lambda \left(\int_{-1}^1 u^2(x)dx - 2 \right), \quad u \in L^2(-1, 1), \quad \lambda \geq 0.$$

Ответ: $\psi(\lambda) = -\infty$ при $\lambda \in [0, 2)$, $\psi(\lambda) = -2\lambda$ при $\lambda \in [2, +\infty)$.

Решение. Подынтегральная функция $m(x) = 8x(x+1)$ на отрезке $x \in [-1, 1]$ принимает все значения из диапазона $[-2, 16]$, где

$$-2 = \min_{x \in [-1, 1]} m(x) = m(-1/2), \quad 16 = \max_{x \in [-1, 1]} m(x) = m(1).$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$L(u, \lambda) = \int_{-1}^1 (m(x) + \lambda) u^2(x) dx - 2\lambda$$

и для её подынтегральной функции имеются оценки

$$\lambda - 2 \leq m(x) + \lambda \leq \lambda + 16. \quad (1)$$

При вычислении значений сопряжённой функции $\psi(\lambda)$ минимизация функции Лагранжа производится по *всему* пространству $L^2(-1, 1)$, поэтому для $\lambda < 2$ при выборе элементов $u_\varepsilon(x)$ вида

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & x \in (-\frac{1}{2} - \varepsilon, -\frac{1}{2} + \varepsilon), \\ 0, & x \notin (-\frac{1}{2} - \varepsilon, -\frac{1}{2} + \varepsilon), \end{cases} \quad \varepsilon > 0,$$

сосредоточенных вблизи точки минимума $x = -\frac{1}{2}$, мы получим предельное соотношение

$$L(u_\varepsilon, \lambda) \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

следовательно,

$$\psi(\lambda) = -\infty \quad \text{при} \quad \lambda \in [0, 2). \quad (2)$$

Если же $\lambda \geq 2$, то $m(x) + \lambda \geq 0$ и минимальное значение функция Лагранжа будет принимать на элементе $u(x) \equiv 0$, значит

$$\psi(\lambda) = -2\lambda \quad \text{при} \quad \lambda \in [2, +\infty). \quad (3)$$

Результаты (2) и (3) являются ответом к заданию №1.

2. Решите двойственную задачу (*), т.е. найдите верхнюю грань ψ^* и множество Λ^* её оптимальных решений.

Ответ: $\psi^* = \psi(2) = -4$, $\Lambda^* = \{\lambda^* = 2\}$.

Решение. Ответ извлекается непосредственно из (2) и (3).

Критерии оценок

Количество выполненных заданий	1	2
Оценка	4.5	5.0